

# 水火箭运动的理论研究

王超 金盈楠 谢妙 陈英才

(台州学院物理系 浙江台州 318000)

(收稿日期:2016-12-08)

**摘要:** 通过理论推导和数值计算对水火箭的运动进行了研究,主要讨论了水火箭运动过程特征以及初始装水量对喷水时间、最大速度和最大高度的影响. 研究结果有助于水火箭的设计以及获得最大发射高度.

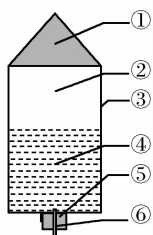
**关键词:** 水火箭 运动过程 动量定理 最佳装水量

## 1 引言

水火箭制作简单,取材方便,是深受青少年学生喜爱的科技制作项目,同时也是各级青少年科技竞赛的常见项目. 目前关于水火箭的文献多集中于火箭的设计、实践以及相对简化的理论讨论,缺乏对水火箭运动进行深入、全面的理论研究<sup>[1~7]</sup>. 本文综合运用质点系力学、流体力学和热学知识对单级水火箭的运动进行理论讨论,并针对火箭加速度、速度、飞行高度随时间的演化以及最佳装水量等问题进行数值计算模拟. 研究结果有助于加深对水火箭运动的认识并为实际实验提供指导.

## 2 理论推导分析

水火箭主要由整流罩、配重物、推进器(可乐瓶)、瓶塞等部分组成,其结构示意图如图1所示. 发射时,首先在推进器内装入一定量水并竖直放置,然后利用充气泵向推进器充气,当推进器内压强足够大时瓶塞和水被高速喷出,同时火箭在反冲作用下开始上升.



① 整流罩及配重物;② 空气;③ 推进器(可乐瓶);

④ 水;⑤ 瓶塞;⑥ 充气管

图1 单级水火箭结构示意图

水火箭的整个上升过程可分为两个阶段,即初期的喷水阶段和后期的惯性上升阶段. 在喷水阶段,推进器内空气压强大于外界大气压从而使水不断喷出,火箭因此受到反冲作用而获得发射驱动力,并在短时间内获得较大的运动速度. 在惯性上升阶段,火箭停止喷水,并在重力和空气阻力作用下以喷水阶段的末速度为初速度继续上升,最终达到最高点.

### 2.1 喷水阶段

$t$ 时刻火箭系统的质量  $m$  可表示为

$$m = m_0 + \rho S_2 l \quad (1)$$

其中  $m_0$  表示空火箭(含空推进器和配重物)的质量,  $\rho$  为水的密度,  $S_2$  为推进器横截面积,  $l$  为推进器内水柱的高度.

$t$ 时刻推进器内空气的体积  $V$  可表示为

$$V = (l_0 - l) S_2 \quad (2)$$

其中  $l_0$  表示推进器的总长度.

在喷水阶段,火箭受喷水的推力、重力以及空气阻力的作用. 根据质点系动量定理(取向上为正方向)有<sup>[8]</sup>

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - v_1 \frac{dm}{dt} - F_r \quad (3)$$

其中  $v$  表示  $t$ 时刻火箭的速度,  $v = \frac{dh}{dt}$  ( $h$  代表火箭的高度),  $g$  为重力加速度,  $v_1$  表示  $t$ 时刻推进器中的水相对于火箭的喷出速度大小,  $F_r$  表示空气阻力. 式(3)右端第二项代表火箭受到的推力. 显然,喷水速度越快,质量改变越快,火箭受到的推力就越大. 空气阻力大小与火箭速度平方成正比<sup>[7]</sup>,即

$$F_r = 0.5 C_r \rho_0 S_2 v^2 \quad (4)$$

其中  $C_r$  为空气阻力系数, 其与物体的形貌有关;  $\rho_0$  为空气的密度. 为了下面表达方便, 用  $\eta$  表示  $0.5C_r\rho_0S_2$ , 即

$$F_r = \eta v^2$$

假定在喷水阶段推进器内的水做定常流动, 则以推进器为参考系(非惯性系)水流的伯努利方程可表示为<sup>[9]</sup>

$$\frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho(g+a)l + p = \frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_0 \quad (5)$$

其中  $v_2$  表示  $t$  时刻推进器内水面相对推进器的下降速度且满足  $v_2 = -\frac{dl}{dt}$ ,  $a$  表示火箭的加速度,  $a = \frac{dv}{dt}$ ,  $p$  代表  $t$  时刻推进器内空气压强,  $p_0$  为外界大气压. 假定推进器内的水不可被压缩, 那么水在喷射过程中满足流体连续性方程

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 \quad (6)$$

其中  $S_1$  为推进器喷口横截面积.

在喷水阶段, 推进器内的空气快速膨胀, 因而可视为绝热过程. 假定推进器内的空气为理想气体, 则存在绝热过程方程

$$pV^\gamma = p_i V_i^\gamma = C_0 \quad (7)$$

其中  $p_i$  和  $V_i$  分别表示初始时刻推进器内空气压强和体积,  $\gamma$  表示气体摩尔热容比,  $C_0$  为一常量, 其取决于  $p_i$  和  $V_i$ .

对上述公式进行联立求解可以得到喷水阶段各运动学参量(如高度  $h$ , 速度  $v$ , 加速度  $a$  等) 随时间的变化关系. 考虑到这些函数关系的解析表达式很难得到, 本文将由初始条件通过数值迭代计算模拟火箭在喷水阶段的运动过程, 进而得到每个时刻各运动学参量的值. 在数值计算时, 我们依据推进器内的压强和水柱的高度来判断喷水阶段是否结束. 具体地, 喷水阶段结束的标志为: 推进器内的压强大于外界大气压, 但水柱的高度已为零, 或者, 水柱的高度不为零, 但推进器内的压强开始小于外界大气压.

## 2.2 惯性上升阶段

在惯性上升阶段, 火箭以喷水阶段的末速度为初速度继续上升直至到达最高点. 在此过程中, 火箭仅受重力和空气阻力作用, 故有动力学方程

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - \eta v^2 \quad (8)$$

由式(8)通过积分可以得到速度  $v$  随时间  $t$  的变化关系:  $v = v(t)$ , 再次积分可以得到高度  $h$  随时间  $t$  的变化关系:  $h = h(t)$ , 其中所用到的积分初始条件为:  $t_m$  时刻火箭的质量为  $m$ , 速度为  $v_m$ , 高度为  $h_m$ . 这里  $t_m$  为喷水阶段所经历的总时间,  $m, v_m$  和  $h_m$  则分别表示喷水阶段结束时火箭的质量、速度和高度. 另外, 将  $v = v(t)$  反代入式(8)也可以得到加速度  $a$  随时间  $t$  的变化关系. 当火箭飞行到达最高点时速度  $v = 0$ , 由此利用函数关系  $v = v(t)$  可求出对应时刻  $T$ , 进而代入函数关系  $h = h(t)$  得到火箭的最大高度  $h_{\max} = h(T)$ . 上述各运动参量在各个时刻的值也通过数值计算得到.

## 3 计算结果讨论

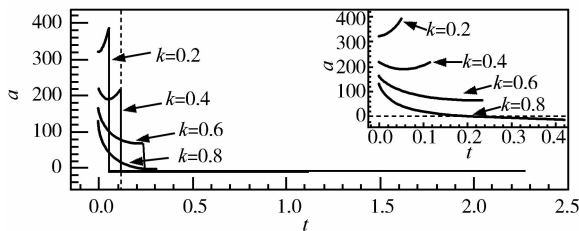
在实际实验中, 推进器内水柱的初始高度  $l_i$  或初始装水量占总容积的比值  $k = \frac{l_i}{l_0}$  (简称为初始装水量) 是非常重要的可调参数, 它对喷水阶段火箭的运动以及火箭最大高度有重要影响. 本文将利用上一部分的理论关系, 主要计算并讨论初始装水量 ( $k$ ) 对火箭各运动量随时间的演化、最大速度和最大高度的影响, 其中用到的模型参数如表 1 所示.

表 1 水火箭模型参数

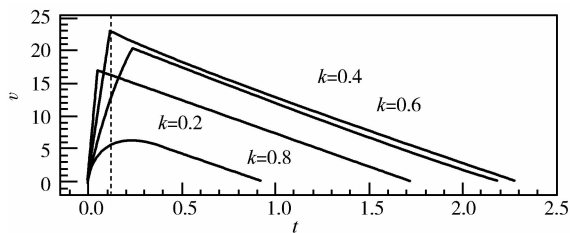
参数	数值	单位
空火箭及配重物质量 $m_0$	0.3	kg
推进器总长度 $l_0$	20.0	cm
喷口横截面直径 $d_1$	1.5	cm
推进器横截面直径 $d_2$	9.0	cm
外界大气压 $p_0$	101	kPa
气体摩尔热容比 $\gamma$	1.4	—
空气的密度 $\rho_0$	1.23	kg/m <sup>3</sup>
水的密度 $\rho$	1000	kg/m <sup>3</sup>
重力加速度 $g$	9.8	m/s <sup>2</sup>
空气阻力系数 $C_r$	0.35	—

图 2(a)、(b) 和 (c) 分别给出了火箭加速度、速度和高度随时间的演化. 由图 2(a) 和 (b) 可以很明显看出, 火箭的运动包含两个不同的阶段, 即前面提到的喷水阶段和惯性上升阶段. 在喷水阶段, 火箭质量不断减小. 同时, 推进器内气体压强不断减小, 从而导致火箭喷水速度不断减小, 火箭受到的推力不断减小. 但这并不意味着火箭的加速度也随时间不断减小. 计算结果表明喷水阶段火箭加速度变化比

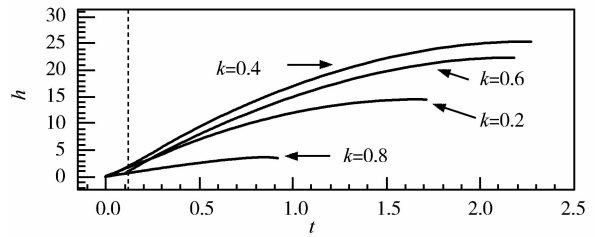
较复杂,且与初始装水量有关,如图2(a)中的插图所示.由图可以看出:当 $k$ 比较小时, $a$ 随 $t$ 单调增大;当 $k$ 比较大时, $a$ 随 $t$ 单调减小;当 $k$ 取中等值时, $a$ 随 $t$ 先减小再增大.关于 $a$ 随 $t$ 的变化可做如下定性理解:当 $k$ 比较小时,在气体快速膨胀过程中,气体压强减小较慢,因此水流的喷射速度大且减小慢,从而导致火箭质量减小快,但推力减小慢,即加速度不断增大;而当 $k$ 比较大时,在气体快速膨胀过程中,气体压强减小较快,因此水流的喷射速度小且减小快,从而导致火箭质量减小慢,但推力减小快,即加速度不断减小.特别地,在喷水阶段后期,火箭受到的推力有可能小于重力与空气阻力的合力,从而使加速度出现负值,如图2(a)插图中 $k=0.8$ 图线所示.在惯性上升阶段,火箭主要受重力和空气阻力(比较小)的作用,因此火箭加速度维持在 $-9.8\text{ m/s}^2$ (重力加速度)附近.与加速度对应,当 $k$ 不太大时,火箭速度在喷水阶段快速增大并达到最大值,而后在惯性上升阶段不断减小;而当 $k$ 比较大时,火箭速度在喷水阶段先增大然后减小,并在惯性上升阶段进一步减小,如图2(b)所示.在整个上升运动过程中,火箭高度始终随时间的增大而增大,直至达到最高点,如图2(c)所示.需要说明的是:由于喷水阶段是一个时间极短的过程,因此火箭在此阶段上升的高度是非常有限的,火箭的最终高度主要取决于其在惯性上升阶段的飞行距离.以图2中 $p_i=6p_0, k=0.4$ 为例,喷水阶段时间为 $0.116\text{ s}$ ,火箭上升的高度为 $1.33\text{ m}$ ,而火箭达到最高点所需要的总时间为 $2.28\text{ s}$ ,高度为 $25.22\text{ m}$ .



插图给出了喷水阶段加速度 $a$ 随时间的演化  
(a) 加速度 $a$ 随时间的演化



(b) 速度 $v$ 随时间的演化



(c) 飞行高度 $h$ 随时间的演化,其中推进器初始压强 $p_i=6p_0$ .

图2 火箭的 $a, v, h$ 随 $t$ 的演化

由图2可以看出,火箭的喷水时间长短、最大速度以及最大高度均与初始装水量有关.图3给出了初始压强取不同值时,火箭喷水阶段所用时间 $t_m$ 随初始装水量 $k$ 的变化.由图可以看出,对于任意给定的 $p_i, t_m$ 总是随 $k$ 的增大先增大再减小,且在 $k=k^*$ 时 $t_m$ 达到最大值.这意味着并不是装水越多喷水时间就越长.火箭停止喷水需满足下面两种条件中的一种:(1)推进器内的水已喷完;(2)推进器内气体压强开始小于外界大气压,此时推进器内仍留有部分水(实际上,在推进器内气体压强等于外界大气压时,推进器内的部分水会在重力作用下流出,但此时对火箭没有推力作用).我们计算发现:当 $k \leq k^*$ 时,火箭停止喷水满足上述条件(1),而当 $k > k^*$ 时,火箭停止喷水则满足上述条件(2);在 $k=k^*$ 位置,火箭把水喷完时推进器内气体压强刚好等于外界大气压,即

$$k^* = 1 - \left(\frac{p_0}{p_i}\right)^{\frac{1}{7}}$$

从而导致 $k^*$ 随 $p_i$ 的增大而增大,如图3所示.

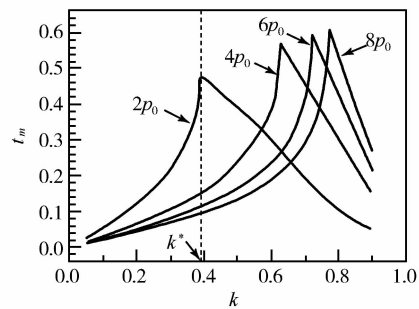


图3 初始压强 $p_i$ 取不同值时,喷水时间 $t_m$ 随初始装水量 $k$ 的变化

图4(a)和(b)分别给出了初始压强 $p_i$ 取不同值时,火箭的最大速度 $v_{\max}$ 以及最终高度 $h_{\max}$ 随初始装水量 $k$ 的变化.由图可以看出:对于任意给定的 $p_i, v_{\max}$ 和 $h_{\max}$ 随 $k$ 的变化满足相似的规律,即它们

都随着  $k$  的增大先增大再减小,而且总存在一个确定的最佳值  $k = k_c$ ,在此附近  $v_{\max}$  和  $h_{\max}$  均达到极大值.由前面的结果可知,火箭的加速过程非常短暂,火箭最终达到的高度主要取决于其在减速上升过程中的飞行距离,因此最大速度  $v_{\max}$  越大火箭的最终高度  $h_{\max}$  也越大.随着  $p_i$  的增大,最佳装水量  $k_c$  不断增大,并逐渐趋向于 0.5,如图 4(b) 插图所示,这与以往的计算结果一致<sup>[6,7]</sup>.

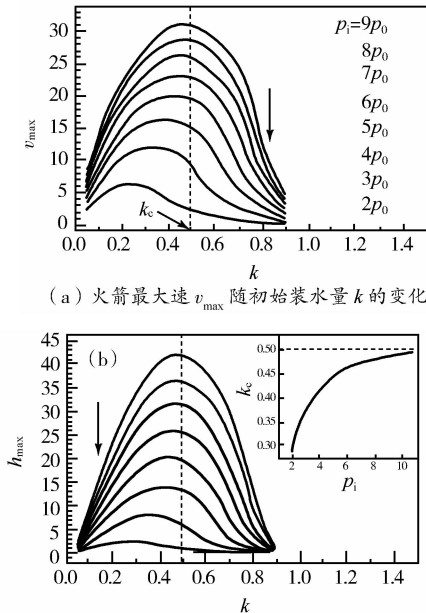


图4 初始压强  $p_i$  取不同值时,  $v_{\max}$  和  $h_{\max}$  随  $k$  的变化图像

#### 4 结论

综合运用质点系动量定理、理想气体绝热膨胀、

伯努利流体力学方程等理论对水火箭运动进行了理论研究,计算并得到了水火箭运动过程中加速度、速度和高度等运动量随时间的演化曲线,揭示了水火箭的运动特征;计算并讨论了初始装水量对火箭喷水时间、最大速度和最大高度的影响,发现最佳装水量随初始压强的增大而增大并最终趋于 0.5. 研究结果对水火箭的设计及获得最大发射高度具有一定的指导意义.

#### 参考文献

- 1 王香芝. 水火箭研究初探. 中学物理教学参考, 2002(4): 17 ~ 17
- 2 梁法库, 梁帅. 可以任意角度发射的水火箭. 物理实验, 2010(10): 31 ~ 32
- 3 方红霞. 关于水火箭水平射程的实验研究. 物理实验, 2011(12): 17 ~ 19
- 4 汪海. 二级加压水火箭的制作方法. 物理实验, 2012(6): 23 ~ 26
- 5 宣树德, 颜季州. 水火箭的半定量研究和改进. 物理通报, 1996(9): 31 ~ 32
- 6 廖立杨, 杨晓冬. 对水火箭发射速度和射程的理论研究. 物理与工程, 2016(3): 82 ~ 86
- 7 候沐朗. 模块化多级水火箭设计与模拟. 兵器装备工程学报, 2016(9): 188 ~ 192
- 8 马文蔚, 周雨青. 物理学(上). 北京: 高等教育出版社, 2014. 65
- 9 顾书龙. 非惯性参照系中的伯努利方程. 物理与工程, 2003(1): 1 ~ 3

## Theoretical Study on the Movement of the Water Rocket

Wang Chao Jin Yingnan Xie Miao Chen Yingcai

(Physics Department of Taizhou University, Taizhou, Zhejiang 318000)

**Abstract:** The movement of the water rocket was studied by theoretical analysis and numerical calculation. The characters of the movement process and the effect of the initial water quantity on the squirted time, the maximum velocity and the maximum height were mainly discussed. The results are useful for designing water rocket and obtaining the maximum launch height.

**Key words:** water rocket; movement process; theorem of momentum; optimal water quantity